ISTITUZIONI DI GEOMETRIA 2016/17

COMPITO 11 LUGLIO 2017

Esercizio 1 (8 punti)**.** Mostra che le matrici unitarie

$$U(n) = \left\{ A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid A^{-1} = {}^{\mathrm{t}}\bar{A} \right\}$$

formano una sottovarietà di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ e calcolane la dimensione. Mostra che

$$SU(n) = \left\{ A \in U(n) \mid \det A = 1 \right\}$$

è una sottovarietà di $U(n)$.

Esercizio 2 (8 punti)**.** Sia M una varietà liscia con bordo non vuoto.

(1) Se M è orientabile, ∂M è necessariamente orientabile?
(2) Se M non è orientabile, ∂M è necessariamente orientabile?

Motiva le risposte in entrambi i casi.

Esercizio 3 (8 punti)**.** Sia $T = S^1 \times S^1$ un toro e $p \in T$ un punto qualsaisi. Considera la 4-varietà $M = T \times T$ e le sottovarietà $N_1 = T \times \{p\}$ e $N_2 = \{p\} \times T$. Calcola tutti i gruppi di coomologia di De Rham della 4-varietà

$$X = M \setminus (N_1 \cup N_2).$$

Esercizio 4 (8 punti)**.** Sia M una varietà liscia.

(i) Scrivi la definizione di connessione.
(ii) Definisci i simboli di Christoffel.
(iii) Siano ∇ una connessione su M e T un campo tensoriale su M di tipo $(1, 2)$. Mostra che l'operatore $\nabla' = \nabla + T$, dato da

$$\nabla'_v X = \nabla_v X + T(p)(v, X(p))$$

per ogni $p \in M$ e $v \in T_pM$, è anch'esso una connessione su M.